

ЛЕКЦИЯ 11

§ 11. Тербелісті және тербеліссіз шешімдер

Екінші ретті сызықтық біртекті

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (1)$$

теңдеуін қарастыралық. Мұндағы $p(t)$ және $q(t)$ функцияларын $[a, b]$ кесіндісінде нақты мәнді және мына шарттарды

$$p(t) \in C^1[a, b], \quad q(t) \in C[a, b]$$

канағаттандырады деп есептелік. Онда (1) теңдеуді

$$x = e^{-\frac{1}{2} \int p(t) dt} y \quad (2)$$

ауыстыруы арқылы

$$\ddot{y} + g(t)y = 0 \quad (3)$$

теңдеуіне келтіруге болатыны көрсетілді. Мұнда $g(t) \in C[a, b]$. Сызық-тық біртекті (1) не (3) түрдегі теңдеулердің нөлдік шешімі бар екені айқын. Біз нөлдік емес шешімдердің нөлге тең болатын жағдайларын зерттейміз. Нақты шешімдер нөлге тең болатын нүктелерді осы *шешімнің нөлдері* деп атайды. Әлбетте (2) ауыстыру шешімнің нөлдерінің санын өзгертпейді, яғни (1) теңдеудің $x = \varphi(t)$ шешімінің нөлдер саны қанша болса, (3) теңдеудің осы шешімге (2) формула бойынша сәйкес келетін $y = \psi(t)$ шешімінің нөлдер саны да сонша болады. (Себебі $e^{-\frac{1}{2} \int p(t) dt} \neq 0, t \in [a, b]$.) Шешімнің өзара көрші орналасқан (арасында шешімнің басқа нөлі жоқ) нөлдерін *көрші нөлдер* деп атайды.

Коэффициент $g(t)$ тұрақты болған кездегі (3) теңдеуді қарастыралық

$$1^0. \quad g(t) = -\omega^2, \quad \forall t \in [a, b], \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad (3) \Rightarrow \ddot{y} - \omega^2 y = 0. \quad (3')$$

Бұл (3') теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t}$$

функциясына тең. Сондықтан оның кез-келген шешімі ешбір аралықта бірден артық рет нөлге тең болмайды.

$$2^0. \quad g(t) = \omega^2, \quad \forall t \in [a, b], \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad (3) \Rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (3'')$$

Бұл теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Мұндағы $C_1 = A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$; A, C_1, C_2, φ кез-келген нақты сандар. Бұдан (3'') теңдеуінің кез-келген шешімі гармоникалық тербелісті анықтайтыны және $(-\infty, +\infty)$ аралығында оның нөлдерінің саны ақырсыз болатыны көрініп тұр (көрші екі нөлінің арақашықтығы π / ω -ға тең). Сондықтан ұзындығы $2\pi / \omega$ -ден артық болатын кез-келген аралықта олар ең болмағанда екі рет нөлге тең болады. Әлбетте ω -ның мәні неғұрлым

үлкен болса, көрші нөлдердің арақашықтығы соғұрлым кіші болады, яғни шешімнің тербелісі жиірек болады. Әдетте қарастырылып отырған аралықта нөлінің саны екіден кем болмайтын шешімді осы аралықта *тербелмелі шешім* деп, ал нөлінің саны бірден аспайтын шешімді тербеліссіз шешім деп атайды.

ЛЕММА. Сызықтық біртекті (1) немесе (3) теңдеуінің нөлдік емес шешімінің $[a, b]$ кесіндісіндегі нөлінің саны ақырлы болады.

ДӘЛІЛДЕУІ. Кері жорып (1) теңдеудің нөлдік емес бір $x = \varphi(t)$ шешімі $[a, b]$ кесіндісінде ақырсыз рет нөлге тең, ал $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ осы нөлдер екен делік. Бұл сандар тізбегі $\{t_n\}$ шенелген болғандықтан, Больцано¹-Вейерштрасс теоремасы бойынша одан жинақталатын ішкі тізбек $\{t_{n_k}\}$ бөліп алуға болады. Осы ішкі тізбектің шегі t^* болсын, яғни $k \rightarrow \infty \Rightarrow t_{n_k} \rightarrow t^*$. Әлбетте $\varphi(t_{n_k}) = 0$, бұдан шешімнің үзіліссіздігі бойынша $\varphi(t^*) = 0$ болады. Ролль² теоремасы бойынша $(t_{n_k}, t_{n_{k+1}})$ аралығында t'_{n_k} нүктесі табылып, $\dot{\varphi}(t'_{n_k}) = 0$ болады. Ал $k \rightarrow \infty \Rightarrow t'_{n_k} \rightarrow t^*$. Олай болса $\dot{\varphi}(t^*) = 0$. Демек $\varphi(t^*) = 0$, $\dot{\varphi}(t^*) = 0$ болғандықтан, жалғыз-дық шарты бойынша $\varphi(t) = 0$, $\forall t \in [a, b]$. Бұл шешім нөлдік емес деген шартқа қайшы. Лемма дұрыс.

САЛЫСТЫРУ ТЕОРЕМАСЫ. Коэффициенттері $\langle a, b \rangle$ аралығын-да нақты мәнді және үзіліссіз екі дифференциалдық теңдеу қарастырайық:

$$\ddot{y} + g_1(t)y = 0, \quad (4_1)$$

$$\ddot{z} + g_2(t)z = 0. \quad (4_2)$$

Егер

$$g_1(t) \leq g_2(t), \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$$

болса, онда (4₁) теңдеудің кез-келген нөлдік емес шешімінің әрбір көрші екі нөлінің арасында (4₂) теңдеудің кез-келген шешімінің ең болмағанда бір нөлі жатады. Мұнда $\langle a, b \rangle$ – ашық (яғни (a, b)) немесе тұйық (яғни $[a, b]$) аралық.

ДӘЛІЛДЕУІ. Айталық $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$, $t_1 < t_2$ нүктелері (4₁) теңдеудің $y = \varphi(t)$ шешімнің көрші екі нөлі болсын:

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0, \quad \forall t \in (t_1, t_2): \varphi(t) \neq 0.$$

Әрбір нөлдік емес шешімнің кез-келген кесіндідегі нөлінің саны ақырлы болғандықтан, олар бір-бірінен оқшау орналасады, яғни әрбір нөлдің басқа нөл кірмейтін маңайы бар болады. Анық болу үшін $\varphi(t) > 0$, $\forall t \in (t_1, t_2)$ деп есептелік. Енді (4₂) теңдеудің бір $z = \psi(t)$ шешімі $[t_1, t_2]$ кесіндісінде нөлге тең болмайды деп жорып, анықтық үшін $\psi(t) > 0$, $\forall t \in [t_1, t_2]$ деп есептейік. Берілген (4₁) және (4₂) теңдеулерге олардың сәйкес $y = \varphi(t)$ және $z = \psi(t)$ шешімдерін апарып қоялық. Шешімдер $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған. Одан соң (4₂)-ден шыққан теңдікті $\varphi(t)$ -ға, ал (4₁)-ден алынған теңдікті $\psi(t)$ -ға көбейтелік те, бірінші теңдіктен екінші теңдікті мүшелеп алалық. Сонда

$$\ddot{\varphi}(t)\psi(t) - \ddot{\psi}(t)\varphi(t) + (g_1(t) - g_2(t))\varphi(t)\psi(t) = 0, \quad \forall t \in \langle a, b \rangle.$$

¹ Больцано Б. (1781-1848) – чех математигі.

² Роль М. (1652-1719) – француз математигі.

Бұл тепе-теңдікті t_1 -ден t_2 -ге дейін интегралдалық. Онда

$$\ddot{\phi}\psi - \ddot{\psi}\phi = (\dot{\phi}\psi - \phi\dot{\psi})$$

және $\phi(t_1) = \phi(t_2) = 0$ екенін ескеріп,

$$\dot{\phi}(t_2)\psi(t_2) - \dot{\phi}(t_1)\psi(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (g_1(\tau) - g_2(\tau))\phi(\tau)\psi(\tau)d\tau = 0 \quad (5)$$

тепе-теңдігін аламыз. Ал $y = \phi(t)$ шешімі нөлдік емес болғандықтан $\dot{\phi}(t_1) \neq 0, \dot{\phi}(t_2) \neq 0$. Егер олардың біреуі нөлге тең болса, $\phi(t_1) = 0, \phi(t_2) = 0$ болғандықтан (бастапқы нөлдік шартты қанағаттандыруы себепті) $y = \phi(t)$ нөлдік шешім болар еді. Сондықтан $\phi(t) > 0, \forall t \in (t_1, t_2)$ деп алғандықтан $\dot{\phi}(t_1) > 0, \dot{\phi}(t_2) < 0$ болады. Ал $\psi(t) > 0, \forall t \in [t_1, t_2]$. Демек:

$$\dot{\phi}(t_2)\psi(t_2) - \dot{\phi}(t_1)\psi(t_1) < 0.$$

Енді $g_1(t) \leq g_2(t)$ және $\forall t \in [t_1, t_2]$ үшін $\phi(t) \geq 0, \psi(t) > 0$ екенін ескерсек, онда $(g_1(t) - g_2(t))\phi(t)\psi(t) \leq 0, \forall t \in [t_1, t_2]$ теңсіздігі алынады. Ен-деше (5) формуладағы интеграл оң емес. Сонымен (5) теңдіктің сол жағында теріс сан тұр, ал оң жағы нөлге тең. Бұл қайшылық жорудың қателігінен болып тұр. Жору дұрыс емес, $[t_1, t_2]$ -де $\psi(t)$ -ның ең болмағанда бір нөлі бар.

1-САЛДАР. Егер $(g(t) \leq 0, \forall t \in \langle a, b \rangle)$ болса, онда (3) теңдеудің кез-келген шешімі тербеліссіз болады.

ДӘЛІЛДЕУІ. Салыстыру теоремасын қолданамыз. Ол үшін $g_1(t) := g(t), g_2(t) := 0, \forall t \in \langle a, b \rangle$ деп есептейміз. Кері жорып, (3) теңдеудің тербелісті бір $y = \phi(t)$ шешімі бар және $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle, t_1 < t_2$ оның екі нөлі екен делік. Онда $[t_1, t_2]$ кесіндісінде $\ddot{z} = 0$ теңдеуінің кез келген шешімі ең болмағанда бір рет нөлге тең болуы керек. Бұл дұрыс емес, мысалы, оның $z(t) = 1$ шешімі ол кесіндіде нөлге тең емес.

2-САЛДАР. (Штурм³ теоремасы). Сызықтық біртекті (1) немесе (3) теңдеудің сызықтық тәуелсіз екі шешімінің нөлдері өзара кезектесіп орналасады, яғни бір шешімнің көрші екі нөлінің ортасында онымен сызықтық тәуелсіз болатын екінші шешімнің тек қана бір нөлі жатады.

ДӘЛІЛДЕУІ. Салдарды (3) теңдеу үшін дәлелдеу жеткілікті. $y = \phi_1(t)$ және $y = \phi_2(t)$ (3) теңдеудің өзара сызықтық тәуелсіз екі шешімі болсын. Олар ортақ нөлге ие бола алмайды, себебі егер $\phi_1(t_1) = \phi_2(t_1) = 0$ болса, онда вронскиан

$$W(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_2(t) \end{vmatrix}$$

t_1 нүктесінде нөлге тең болар еді де, $\phi_1(t)$ мен $\phi_2(t)$ шешімдері өзара сызықтық тәуелді болар еді. Айталық, t_1, t_2 нүктелері $\phi_1(t)$ шешімінің көрші екі нөлі болсын, $t_1 < t_2$. Салыстырылатын (41) және (42) теңдеулер үшін (3) теңдеудің өзін аламыз, яғни $g_1(t) = g_2(t) := g(t), \forall t \in \langle a, b \rangle$. Салыстыру теоремасы бойынша t_1 мен t_2 -нің арасында $\phi_2(t)$ шешімінің ең болмағанда бір нөлі жатады. Олар екеу болсын: t_3 және t_4 , яғни $\phi_2(t_3) = \phi_2(t_4) = 0$. Онда салыстыру теоремасы бойынша t_3 мен t_4 -тің арасында $\phi_1(t)$

³ Штурм Ж.Ф. (1803-1855) – француз математигі.

шешімінің ең болмағанда бір нөлі бар болады, яғни $\exists t_0 \in (t_3, t_4) \subset (t_1, t_2)$, $\varphi_1(t_0) = 0$. Бұл, t_1 мен t_2 нүктелері $\varphi_1(t)$ шешімінің көрші нөлдері деген шартқа қайшы. Салдар дұрыс.

МЫСАЛ. Мына теңдеудің

$$\begin{aligned}\ddot{x} + g(t)x &= 0 \\ g(t) &\in C[a, b], g(t) > 0, \forall t \in [a, b], \\ m &= \inf_t g(t), M = \sup_t g(t)\end{aligned}$$

нөлдік емес шешімінің нөлдерінің арақашықтығын төменнен және жоғарыдан шектейтін сандарды табу керек. Берілген теңдеудің шешімі нөлдерінің арақашықтығын d деп белгілелік. Салыстыру теоремасын екі рет қолданамыз. Бірінші рет $\ddot{x} + g(t)x = 0$, $\ddot{z} + Mz = 0$ теңдеулерін, ал екінші рет $\ddot{z} + mz = 0$, $\ddot{x} + g(t)x = 0$ теңдеулерін бірге қарастырамыз. Сонда

салыстыру теоремасы бойынша бірінші рет $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq d$, ал екінші рет $d \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ теңсіздіктері

алынады, яғни $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ екені шығады.

Жаттығулар

Төмендегі теңдеулердің шешімдерінің берілген аралықтағы нөлдерінің арақашықтықтарын бағалаңыз.

1. $\ddot{x} + (t^2 + 9)x = 0$, $0 \leq t \leq 4$.
2. $t\ddot{x} + x = 0$, $36 \leq t \leq 49$.
3. $\ddot{x} - 2t\dot{x} + (t+1)^2 x = 0$, $4 \leq t \leq 19$.

Бақылау сұрақтары

1. Екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулердің қандай түрлері бар, олар-дың арасындағы байланыс қандай?
2. Қай кезде дифференциалдық теңдеудің шешімдері тербелісті немесе тербеліссіз деп аталады? Мысалдар қандай?
3. Екінші ретті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеу шешімінің кесіндідегі нөлдері қандай жиын құрайды?
4. Салыстыру теоремасы не туралы?
5. Қай кезде бірінші ретті туынды кірмейтін екінші ретті сызықтық біртекті теңдеу-дің шешімдері тербеліссіз болады?